Tentamen Meetkunde

14 april, 2010, 9–12 uur

N.B.: dit is een open-boek-tentamen

Exercise 1 (20 pt.)
Gegeven is een compact oppervlak M in $\mathbb{R}^3$, en een punt p buiten M. De functie $f : M \to \mathbb{R}$ is de 'distance-squared' functie m.b.t. p, gedefiniëerd door

$$f(x) = \| x - p \|^2.$$

1. Toon aan dat f een minimum heeft op M.

2. Als $\mathbf{q}$ een punt is waarin dat minimum wordt aangenomen, dan staat de vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ loodrecht op het raakvlak in $\mathbf{q}$ aan M. Toon dit aan.

Exercise 2 (20 pt.)
Laat $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ een unit-speed kromme zijn, waarvan de kromming overal positief is. Hierbij is $I = [a, b]$. Laat $N(s)$ en $B(s)$ de normaal en binormaal zijn van α, en laat r een positieve constante zijn. Definiëer $\mathbf{x} : I \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ door

$$\mathbf{x}(s, v) = \alpha(s) + r\big((\cos v)\, N(s) + (\sin v)\, B(s)\big).$$

1. Toon aan dat $\mathbf{x}$ een regular patch is mits r voldoende klein is.

2. Toon aan dat de eenheidsnormaal van de patch in $\mathbf{x}(s, v)$ wordt gegeven door

$$U(s, v) = -\big((\cos v)\, N(s) + (\sin v)\, B(s)\big).$$

3. Gegeven is dat de kromming en de torsie van α constant zijn. Toon aan dat voor vaste v de kromme $\beta_v : I \to \mathbb{R}^3$, gedefiniëerd door $\beta_v(s) = \mathbf{x}(s, v)$, constante kromming heeft.

Exercise 3 (25 pt.)
M is een georiënteerd oppervlak in $\mathbb{R}^3$ met eenheidsnormaalvectorveld U, en $\alpha : I \to M$, met $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, is een unit-speed kromme op M, met Frenet-Serret frame $\{T, N, B\}$. Het eenheidsvectorveld V langs α is gedefiniëerd door $V = U \times T$. De *geodetische torsie* τ_g van α is

$$\tau_g = S(T) \cdot V,$$

waarbij $S : T_{\alpha(s)}M \to T_{\alpha(s)}M$ de shape-operator is in $\alpha(s)$, voor $s \in I$.

Z.O.Z.

Laat de orthonormale basis $\{e_1, e_2\}$ van $T_{\alpha(s)}M$ bestaan uit de hoofdkrommingsrichtingen, horend bij de hoofdkrommingen k_1 en k_2; deze basis is positief georiënteerd, dus $e_1 \times e_2 = U$. Let op: S, e_1, e_2, k_1, k_2 etc. hangen af van s, maar dit brengen we niet tot uitdrukking in de notatie.

Toon het volgende aan.

1. Als φ de hoek is van e_1 naar T, dan is $\tau_g = (k_2 - k_1)\cos\varphi \sin\varphi$.
   (Aanwijzing: druk T en V uit in e_1 en e_2.)

2. Een kromme op M is een kromtelijn d.e.s.d.a.[1] de geodetische torsie in elk punt nul is.

3. Als τ de torsie is van α, en ϑ is de hoek *van* U *naar* N, dan is

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \tau_g - \tau.$$

   (Aanwijzing: differentiëer $\cos\vartheta = U \cdot N$ naar s.)

Exercise 4 (25 pt.)
Laat $M = \{(x, y) \mid x^2+y^2 < 1\}$. We maken van M een Riemanns oppervlak ('geometric surface') door het te voorzien van het inproduct $\langle , \rangle$, gedefiniëerd als volgt. Voor $\mathbf{p} \in M$, en $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ geldt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{h(\mathbf{p})^2},$$

waarbij $h : M \to \mathbb{R}$ positief is op M, en $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$ is.

1. Toon aan dat er een functie $f : M \to \mathbb{R}$ is zodat $\{E_1, E_2\}$, met $E_1 = f\,U_1$ en $E_2 = f\,U_2$, een orthonormaal frame field is op M. Zoals gebruikelijk zijn U_1 en U_2 de vectorvelden in de x- resp. y-richting met eenheidslengte ten opzichte van het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$.

2. Bepaal de duale 1-vormen van dit frame field (d.w.z., druk deze 1-vormen uit in dx en dy).

3. Bepaal de connectievorm ω_{12} van dit frame field

4. Druk de Gauß-kromming K uit in h en zijn afgeleiden.

5. Laat nu $h(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)$. Bereken de Gauß-kromming.

[1] Dan en slechts dan als (*if and only if*)

Uitwerking

Opgave 1.

1. Omdat M compact is en f continu, neemt f het minimum aan op M.

2. Laat $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}M$, en laat $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ een kromme zijn met $\alpha(0) = \mathbf{q}$ en $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Dan heeft de functie $t \mapsto f(\alpha(t))$ een minimum in $t = 0$, dus

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\alpha(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} ((\alpha(t) - \mathbf{p}) \cdot (\alpha(t) - \mathbf{p})) \\ &= 2\alpha'(0) \cdot (\alpha(0) - \mathbf{p}) \\ &= 2\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}), \end{aligned}$$

dus $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ staat loodrecht op $\mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{v}$ willekeurig is, volgt hieruit dat $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ loodrecht staat op $T_{\mathbf{q}}M$.

Opgave 2.

1. Laat κ en τ de kromming resp. torsie zijn van α. Gebruik makend van de vergeljkingen van Frenet-Serret leiden we af

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s &= (1 - \kappa r \cos\nu)\, T + \tau r \big(-(\sin\nu)\, N + (\cos\nu)\, B\big); \\ \mathbf{x}_\nu &= r\big(-(\sin\nu)\, N(s) + (\cos\nu)\, B(s)\big). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\nu = -r\,(1 - \kappa r \cos\nu)\, \big((\cos\nu)\, N(s) + (\sin\nu)\, B(s)\big), \tag{1}$$

dus $\|\, \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\nu \,\| = r(1 - \kappa r \cos\nu) > 0$, voor r voldoende klein (bijv. $r < \min_{s \in I} \dfrac{1}{\kappa(s)}$). De patch is dus regulier.

2. Uit (1) volgt de gevraagde uitdrukking voor $U = \dfrac{\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\nu}{\|\, \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_\nu \,\|}$.

3. Omdat κ en τ constant zijn geldt

$$\|\, \beta_\nu'(s) \,\| = \|\, \mathbf{x}_s \,\| = \sqrt{(1 - \kappa r \cos\nu)^2 + \tau^2 r^2},$$

dus $\|\, \beta_\nu'(s) \,\|$ is constant (omdat ν vast is). Bovendien geldt

$$\beta_\nu''(s) = \mathbf{x}_{ss} = -\tau r \sin\nu\,(\kappa T + \tau B) + \big(\kappa - r\,(\kappa^2 + \tau^2)\, \cos\nu\big)\, N,$$

dus

$$\|\, \beta_\nu''(s) \,\|^2 = r^2\tau^2(\kappa^2 + \tau^2)\, \sin^2\nu + (\kappa - r\,(\kappa^2 + \tau^2)\, \cos\nu)^2.$$

Omdat $\|\, \beta_\nu'(s) \,\|$ en $\|\, \beta_\nu''(s) \,\|$ constant zijn (onafhankelijk van s), is de kromming van β_ν constant.

Opgave 3.

1. Het frame $\{T, V\}$ is als volgt uit te drukken in $\{e_1, e_2\}$:

$$\begin{aligned} T &= \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2, \\ V &= -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2. \end{aligned}$$

Aangezien e_i hoodkrommingsrichting is bij de hoofdkromming k_i, geldt:

$$S(T) = k_1 \cos\varphi\, e_1 + k_2 \sin\varphi\, e_2.$$

Hieruit volgt eenvoudig

$$\tau_g = S(T)\cdot V = -k_1 \sin\varphi\cos\varphi + k_2 \sin\varphi\cos\varphi.$$

2. α is kromtelijn d.e.s.d. als $S(T)$ en T parallel zijn d.e.s.d. als $S(T)\cdot V = 0$. (Merk op dat $S(T)\cdot U = 0$.)

3. Merk op dat zowel $\{T, N, B\}$ als $\{T, U, V\}$ orthonormale frames zijn. We kunnen dus N en B uitdrukken in U en V. Laat $N = \cos\vartheta\, U + \sin\vartheta\, V$, dan is

$$B = T\times N = \cos\vartheta\, T\times U + \sin\vartheta\, T\times V = -\cos\vartheta\, V + \sin\vartheta\, U.$$

Differentiëren van $U\cdot N = \cos\vartheta$ geeft:

$$\begin{aligned} -\vartheta' \sin\vartheta &= U'\cdot N + U\cdot N' \\ &= -S(T)\cdot N + U\cdot(-\kappa T + \tau B) \\ &= (-\tau_g + \tau)\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Hier hebben we gebruikt dat

$$S(T) = (S(T)\cdot T)\,T + (S(T)\cdot V)\,V = k(T)\,T + \tau_g V.$$

Als ϑ niet identiek nul is, dan volgt hieruit $\vartheta' = \tau_g - \tau$. Als ϑ identiek nul is, dan is $N \equiv U$, dus $\tau_g = S(T)\cdot V = -U'\cdot V = N'\cdot B = \tau$. Dus ook in dit geval is $\vartheta' = 0 = \tau_g - \tau$.

Opgave 4.

1. $\langle fU_1, fU_2\rangle = \dfrac{f^2}{h^2}$, dus neem $f = h$.

2. Laat ϑ_1 en ϑ_2 de duale 1-vormen zijn, dan

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(U_1)\,dx + \vartheta_1(U_2)\,dy = \frac{1}{h}\,dx.$$

Analoog: $\vartheta_2 = \dfrac{1}{h}\,dy$.

3. Laat $\omega_{12} = P\,dx + Q\,dy$. Om P en Q te bepalen gebruiken we de eerste structuurvergelijkingen

$$d\vartheta_1 = \omega_{12}\wedge\vartheta_2 \quad \text{en} \quad d\vartheta_2 = -\omega_{12}\wedge\vartheta_1.$$

Deze geven

$$\frac{h_y}{h^2} dx \wedge dy = \frac{1}{h} P\, dx \wedge dy,$$

$$-\frac{h_x}{h^2} dx \wedge dy = \frac{1}{h} Q\, dx \wedge dy.$$

Hieruit volgt

$$P = \frac{h_y}{h}, \quad Q = -\frac{h_x}{h}, \tag{2}$$

dus

$$\omega_{12} = \frac{1}{h}\,(h_y\, dx - h_x\, dy).$$

4. Omdat $d\omega_{12} = -K\,\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$, en

$$d\omega_{12} = (-P_y + Q_x)\, dx \wedge dy = h^2(-P_y + Q_x)\,\vartheta_1 \wedge \vartheta_2.$$

hebben we

$$K = h^2\,(P_y - Q_x). \tag{3}$$

Invullen van (2) in (3) geeft

$$K = h\,(h_{xx} + h_{yy}) - (h_x^2 + h_y^2).$$

5. Invullen van de uitdrukking voor h in die van K geeft $K = -1$.